«Кенгуру – выпускникам – 2023». 9 класс. Ответы и решения

1. Ответ – да.

$$0{,}1 + 3{,}2 : 3 = \frac{1}{10} + \frac{32}{30} = \frac{35}{30} = 7/6 < 1\frac{1}{2}$$

2. Ответ – нет.

$$\frac{2^3 \cdot 6^7}{4^4 \cdot 9^3} = \frac{2^3 \cdot 2^7 \cdot 3^7}{2^8 \cdot 3^6} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

3. Ответ – да.

$$\left(\frac{\sqrt{18}}{3} - \left(\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}\right)\right) \cdot \sqrt{72} = \left(\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{8}\right) \cdot 6\sqrt{2} == 12 - 48 + 24 = -12$$

4. Ответ – нет.

5. Ответ – да.

После преобразования правой части получим левую, следовательно тождество верно.

$$\frac{x + 1 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = \frac{x}{1 - x^2}$$

6. Ответ – да.

$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} > 0,\ 2\sqrt{2} - 1 > 0$,
тогда возведём в квадрат: $9 - 4\sqrt{2} = (2\sqrt{2} - 1)^2$ - верно

7. Ответ – да.

$y(1) = a + 2 + c, y(-1) = a - 2 + c. y(1) - y(-1) = 4$

8. Ответ – да.

Находим дискриминант уравнения $ax^2 + 2x + c = 0$,
$D = 4 - 4ac = 4(1 - ac)$, по условию $ac < 1$, тогда $D > 0$. Уравнение имеет два корня; корни - это значения x, в которых график пересекает ось Ox.

9. Ответ – нет.

Находим координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{2}{2a} = -\frac{1}{a}$.
По условию $a > 0$, тогда абсцисса вершины параболы $x_0 < 0$;
ордината вершины $y_0 = y\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{2}{a} + c = \frac{1-2+ac}{a} = \frac{ac-1}{a} < 0$.
Точка, у которой координаты отрицательные числа, находится в третьей четверти.

10. Ответ – да.

Можно рассуждать по-разному. Рассуждаем так: в трехзначном числе на первом месте число сотен, можно написать 3 цифры, на втором десятки – 4 цифры, на третьем единицы – 4 цифры. Получим
$3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$. В комбинаторике такое рассуждение называется правилом произведения.

11. Ответ – нет.

Количество чисел, у которых все цифры разные, находим по правилу произведения: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$, (их количество можно вычислить и по-другому). Вероятность равна $18 : 48 = 3/8$

12. Ответ – нет.

Кратны четырём числа, у которых число, образованное двумя последними цифрами, кратно четырём. В данном случае кратны четырём будут числа, которые оканчиваются на 00, 04, 12, 20, 24, 40, 44.
На месте сотен у каждого из них может стоять 3 цифры.
Всего получится: $3 \cdot 7 = 21$.

13. Ответ – да.

Первое неравенство равносильно неравенству $x < -14$,
второе $-x > -6$. Система решений не имеет.

14. Ответ – да.

Неравенство $x - \frac{8}{x} < 6$ решаем методом интервалов, приводим к виду
$\frac{x^2-6x-8}{x} < 0$; корни числителя $x = 3 \pm \sqrt{17}$, корень знаменателя $x = 0$.
Сравниваем $3 - \sqrt{17}$ и -2; получим: $3 - \sqrt{17} > -2$, значит все числа меньшие -2 являются решениями неравенства.

15. Ответ – да.

Неравенство равносильно неравенству $|2x - 5| \leq 7$.

Решаем его, получим: $-7 \leq 2x - 5 \leq 7$, $-1 \leq x \leq 6$. Множество решений - 8 целых чисел.

16. Ответ - да.

Уравнение равносильно уравнению $3x - 3 - 4x - 2 = 72$, откуда $x = -77$.

17. Ответ – нет.

Решая уравнение методом разложения на множители, получим: $x = 1, x^2 + 3x - 1 = 0$, корнями квадратного уравнения являются числа $\frac{-3 \pm\sqrt{13}}{2}$. Число $\frac{-3 -\sqrt{13}}{2}$ не принадлежит промежутку (-2; 2).

18. Ответ нет.

Корнями числителя являются числа $x = 2$, $x =$ -5. Но $x = 2$ не удовлетворяет уравнению, так как при $x = 2$ знаменатель равен нулю. Уравнение имеет один корень

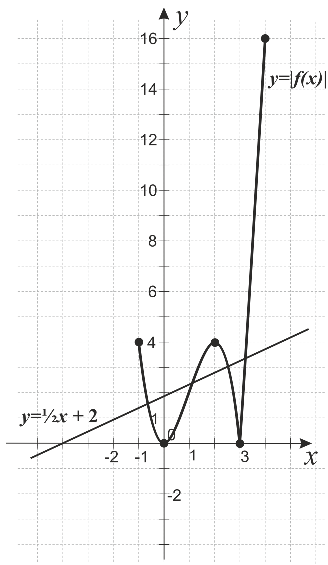
19. Ответ – нет.

Заметим, что данному промежутку принадлежит $x = 0$ и при этом y не отрицателен, $y = 0$.

20. Ответ – да.

В промежутки возрастания входят целые числа: -1, 0, 2, 3, 4. Их сумма равна 8.

21. Ответ – нет. См. рисунок



22. Ответ – нет.

Поскольку известны все стороны треугольника, по обратной теореме Пифагора определяем, что он прямоугольный. Две высоты – это катеты, равные 5 и 12. Высоту, проведенную к гипотенузе, вычисляем. Площадь треугольника равна половине произведения катетов и равна 30, с другой стороны, площадь треугольника равна половине гипотенузы, умноженной на высоту. Получим $h = 30 : \frac{13}{2} = \frac{60}{13}$. Сумма длин высот равна $5 + 12 + \frac{60}{13} > 20$.

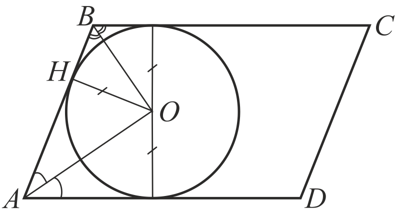
23. Ответ – да.

В треугольнике ABC все стороны известны, по тереме косинусов находим косинус угла B, лежащего напротив AC. AC – большая диагональ, тогда угол B – тупой.

$36 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \angle B$. Из равенства находим $\cos \angle B = -\frac{11}{24}$.

Зная, что $\cos 120° = -\frac{1}{2} < -\frac{11}{24}$ получаем, что $\angle B < 120°$, тогда острый угол параллелограмма будет больше 60°.

24. Ответ – да.



По условию окружность касается сторон углов $\angle ABC$ и $\angle BAD$, значит, она является вписанной в эти углы и ее центр находится в точке пересечения биссектрис этих углов. Сумма углов ABC и BAD равна 180°, тогда сумма половинок равна 90°. Треугольник ABO – прямоугольный, $OA = 8$, $OB = 6$ по условию. Применяя теорему Пифагора, получим $AB = 10$. По условию периметр параллелограмма равен 50, тогда его стороны равны 10, 10, 15, 15. Заметим, что точка O находится на одинаковом расстоянии от сторон AB, AD и BC. Расстояние от O до AB – OH – высота треугольника AOB и она равна $\frac{24}{5}$. Высота параллелограмма – это сумма расстояний от O до AD и до BC, тогда высота параллелограмма равна $\frac{48}{5}$, проведена к основанию AD. Площадь параллелограмма $\frac{48}{5} \cdot 15 = 144$.

25. Ответ – нет.

В условии не указано, какие стороны являются основаниями трапеции, нужно рассматривать два случая: угол D – острый и угол D – тупой. Для случая, когда угол D – тупой, BD не будет являться биссектрисой угла D.

26. Ответ – да.

Треугольник ABD является вписанным в окружность. Применяем теорему синусов: $BD : \sin A = 2R, \sin 30° = \frac{1}{2}$, отсюда $BD = R$, диагонали равны, так как вписанная трапеция является равнобедренной, $AC = R$

27. Ответ – нет.

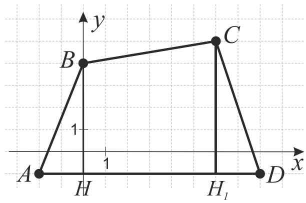
Рассмотрим первый случай, когда угол D – острый, в данном случае AB – боковая сторона и $AB = 8$; трапеция равнобедренная, так как она вписана в окружность, значит $CD = 8$. По свойству вписанной трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон и равна 16.
Дополнительное построение – проведем высоту BH и CH_1. По свойству равнобедренной трапеции $AH = DH_1$. В прямоугольном треугольнике ABH $\angle$A равен по условию 60°, тогда AH лежит напротив угла 60° и $AH = \frac{1}{2}AB = 4, DH_1 = 4$.
$AD + BC = 16, AD + BC = 2BC + 2AH = 2BC + 8 = 16,$
$BC = 4,$ а $AD = 16 - 4 = 12.$

Получим одно основание в три раза больше другого. Второй случай можно не рассматривать, так как условие в общем виде для трапеции не выполняется.

28. Ответ – нет.

$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, по условию $AC + CB > 3\sqrt{2}$, значит точка C не лежит на отрезке AB.

29. Ответ – да



Разбиваем четырехугольник на два прямоугольных треугольника и прямоугольную трапецию, как показано на рисунке. Площадь четырехугольника равна сумме их площадей: $5 + 6 + 33 = 44$.

30. Ответ – нет.

Если векторы лежат на параллельных прямых, то они коллинеарные, для коллинеарных векторов выполняется равенство: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{MN}$.
Находим координаты векторов: $\overrightarrow{AB}(12;\ -6)$, $\overrightarrow{MN}(-26; y + 8)$.
Применяя равенство$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{MN}$, получим: $12 = -26k;\ -6 = (y + 8)k$, тогда $k = -\frac{6}{13}, y = 5$.

31. Ответ – нет.

Пусть скорость Васи x км/ч, тогда скорость Пети $(x + 6)$ км/ч, расстояние от дома до спортшколы S км. Составляем два уравнения: $\frac{S}{x} - \frac{S}{x+6} = \frac{1}{4}$, откуда $24S = x(x + 6)$; второе уравнение: $\frac{S}{2x+6} = \frac{3}{10}$; после преобразований получим $x = \frac{5S-9}{3}$. Подставляя значение x в первое уравнение, получим $\frac{25}{9}s^2 - 24S - 9 = 0$, откуда $S = 9$ или $S = -\frac{9}{25}$, которое не подходит по условию задачи. Расстояние от дома до спортшколы 9 км.

32. Ответ – нет.

Обозначим время совместной работы всех труб t ч. По условию задачи получим уравнение $\frac{24}{60} \cdot \frac{1}{10} + t\left(\frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{5}\right) = 1, t = \frac{16}{5} = 3$ ч 12 мин.
3 ч 12 мин $+$ 24 мин $=$ 3 ч 36 мин.

33. Ответ – да.

Пусть первый раствор – 7A литров, второй – 8A литров. В первом растворе содержится 0,7A соли, во втором – 2A соли. После того, как их смешали, получили 15A литров раствора, в котором соли содержится 0,15Ax, где x – процентное содержание соли в смеси. Уравнение 0,7A +2A $=$ 0,15Ax, отсюда $x = 18$.

34. Ответ – да.

Произведение $n!$ даст на конце столько нулей, сколько имеется простых делителей, равных 5, в его множителях. По условию $n!$ оканчивается тремя нулями, значит, в этом произведении есть числа 5, 10, 15, но нет 20. То есть, $n!$ – это произведение чисел либо от 1 до 15, либо от 1 до 16, от 1 до 17, от 1 до 18, от 1 до 19. Тогда $(n + 15)!$ в любом случае содержит числа 20, 25, 30, но не содержит 35, число простых делителей 5 в этих числах равно 4, которые добавят к произведению еще 4 нуля.

35. Ответ – нет.

НОД$(n; m) = 42$, НОК$(n; m) = 630 = 42 \cdot 3 \cdot 5$. Тогда один из вариантов: одно из них равно 42, а другое 630, что не соответствует утверждению.

36. Ответ – нет.

Пусть одно число x, а другоеy. Среднее геометрическое равно $0{,}4 = \sqrt{xy}$, тогда $xy = 016$; среднее арифметическое равно $0{,}5 = \frac{x+y}{2}$, откуда $x + y = 1$. Тогда – одно из чисел равно 0,2, а другое 0,8. Разность их квадратов по модулю равна 0,6.