«Кенгуру – выпускникам – 2024». 9 класс. Ответы и решения

1. Ответ – нет.

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{12} : \frac{3}{4} = \frac{7}{12} - \frac{20}{36} = \frac{1}{36} = 0{,}02 \ldots < 0{,}2$$

2. Ответ – нет.

$$\sqrt{1\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{9 \cdot 0{,}4} = \sqrt{\frac{10 \cdot 9 \cdot 0{,}4}{9}} = \sqrt{4} = 2 \ \neq 1\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 0{,}2$$

3. Ответ – нет.

$$1{,}48 \ \cdot 10^{-5} : (\ 3{,}7 \cdot 10^{-6}) = 1{,}48 : 3{,}7 \ \cdot (10^{-5} : 10^{-6}) = 0{,}4 \cdot 10 = 4 \neq 0{,}4$$

4. Ответ – да.

$$(x^2 - 2x + 1)(x \ + 1) \ = (x - 1)^2(x + 1) = \ (x^2 - 1)(x - 1)$$

5. Ответ – да.

$$1 - \frac{5}{x + 1} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - 5(x - 1) - 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$$

6. Ответ – нет.

$$\frac{4 \ \cdot 10^{2n}}{2^{2n+1} \cdot 25^{n-1}} = \frac{4 \ \cdot 10^{2n}}{2 \cdot 2^{2n} \cdot 5^{2n} \ : 5^2} = 50; \ \frac{10^{2(n+1)}}{4^n \cdot 5^{2n}} = \frac{10^{2n+2}}{10^{2n}} = 100$$

7. Ответ – да.

$$\frac{2x + 3}{6} - \frac{3x - 8}{8} = 2, \ 4(2x + 3) - 3(3x - 8) = 48, \ 2x = 12, \ x = 6$$

8. Ответ – нет.

$$\begin{cases} x(1 + y) = 6 \\ xy^2 + xy^3 = 24 \end{cases}, \begin{cases} x(1 + y) = 6 \\ xy^2(1 + y) = 24 \end{cases}, \begin{cases} x(1 + y) = 6 \\ 6y^2 = 24 \end{cases}, \begin{cases} x(1 + y) = 6 \\ y^2 = 4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x(1 + y) = 6 \\ y = \pm 2 \end{cases}, \ y = 2, x \ = \ 2; \ y = -2, x = -5; \ 2 + 2 + (-2) + (-5) = -3$$

9. Ответ – да.

$\frac{x}{2+3x}-\frac{5}{3x-2}=\frac{15x+10}{4-9x^2}$. Находим ОДЗ: $x \neq \pm\frac{2}{3}$.

Приводим к целому виду, получим уравнение:

$x(3x-2)-5(3x+2)=-(15x+10), 3x^2-2x=0, x=0$ или $x=\frac{2}{3}$, который не удовлетворяет ОДЗ. Остается один корень $x=0$.

10. Ответ – нет.

$\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}\cdot x-\left(\frac{4}{7}\right)^{-4}\cdot x<\left(\frac{7}{4}\right)^{4}$. Обе части неравенства делим на $\left(\frac{4}{7}\right)^{-4}$.

Получим $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3+4}\cdot x-x<1,\ 4x-7x<7,\ x>-\frac{7}{3}$.

В этом промежутке нет наибольшего целого числа.

11. Ответ – да.

$\begin{cases} x^2>4 \\ 12-3(x-1)>3x+1 \end{cases}$, $\begin{cases} |x|>2 \\ -6x>-14 \end{cases}$, $\begin{cases} x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty) \\ x\in\left(-\infty;\frac{7}{3}\right) \end{cases}$,

x $\epsilon(-\infty;\ -2)\cup\left(2;\frac{7}{3}\right)$

12. Ответ – да.

$\frac{x^2-2}{x^2-2x-8}\geq 1,\ \frac{x^2-2-x^2+2x+8}{x^2-2x-8}\geq 0,\ \frac{2x+6}{x^2-2x-8}\geq 0$

Решая методом интервалов, получим $x\ \epsilon\ [-3;\ -2)\ \cup\ (4;\ +\infty)$.

Промежутку [-5; 5] принадлежат целые числа -3 и 5, сумма которых равна 2.

13. Ответ – нет.

$y=(x-3)(1-x)\ =-x^2+4x-3$ – квадратичная функция, график – парабола.

14. Ответ – да.

Решаем уравнение $(x-3)(1-x)=-3,\ \ -x^2+4x=0$.

Это уравнение имеет два корня.

15. Ответ – да.

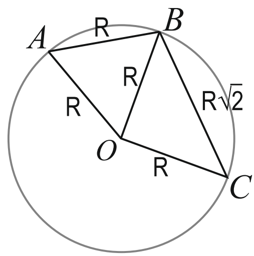
$(x-3)(1-x) \leq 1, x^2-4x+4 \geq 0,\ (x-2)^2 \geq 0$ верно для любых x.

16. Ответ – да.

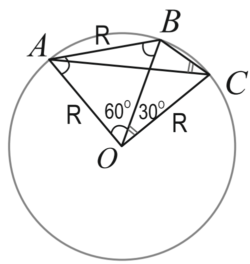
$1x+2x+3x=360°$, градусные меры дуг соответственно равны $60°$, $120°$, $180°$. Углы треугольника – вписанные, их значения равны половине дуг, на которые они опираются, т.е. $30°, 60°, 90°$.

17. Ответ – да.

Есть два случая расположения треугольника в окружности.



1) Пусть $AB=R, BC=R\sqrt{2}$, заметим, что треугольник AOB – равносторонний, а треугольник BOC – равнобедренный прямоугольный (две стороны его равны R, а третья $R\sqrt{2}$, по обратной теореме Пифагора треугольник прямоугольный).
Значит $\angle ABC = 60° + 45° = 105°$.

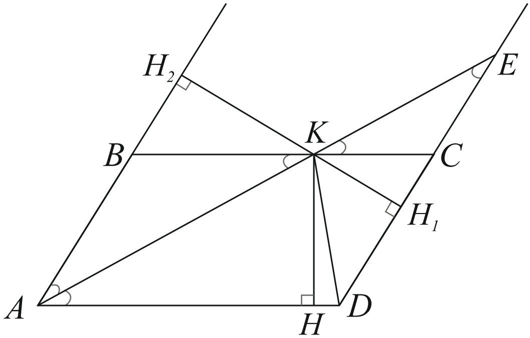


2) Пусть $AB=R, AC=R\sqrt{2}$. Треугольник ABO – равносторонний, дуга $AB=60°$, значит $\angle ACB = 30°$; треугольник AOC – равнобедренный прямоугольный, дуга $ABC=90°$, дуга $BC=30°$, тогда $\angle BAC = 15°$; вычисляем $\angle ABC = 180° - 30° - 15° = 135°$.

18. Ответ – нет.

По условию $AB=R, BC=R\sqrt{2}$, тогда треугольник ABO – равносторонний, а треугольник BCO – равнобедренный прямоугольный. Четырехугольник $ABCO$ состоит из равностороннего треугольника AOB и равнобедренного прямоугольного треугольника BOC. Площадь $ABCO = \frac{1}{2}R^2 \sin 60° + \frac{1}{2}R^2 = \sqrt{3}+2$.

19. Ответ – да.



AK – биссектриса $\angle BAD$, тогда $\angle BAK = \angle KAD$. Каждый из них равен накрест лежащим углам $\angle BKA$ и $\angle AED$. Треугольники ABK и AED подобны по первому признаку подобия треугольников.

20. Ответ – нет.

Из п.19 следует, что углы при основаниях треугольников ABK и AED равны, значит эти треугольники – равнобедренные.
Пусть $DC = 2x, CE = 1x, BC = AD = DE = 12$ см $= 3x$; $x = 4$ см;
$DC = BC = 2x = 8$ см; $P = 24 + 16 = 40$ см.

21. Ответ – да.

Площадь параллелограмма $= AD \cdot KH, KH$ – перпендикуляр к стороне AD. Площадь треугольника $KDE = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot KH_1$ (KH_1 – высота треугольника KDE), $AD = DE$ (п.20). Сравниваем высоты KH_1 и KH. Треугольник ABK подобен треугольнику KCE с коэффициентом подобия $k = 3$. Значит, KH_2 – высота треугольника ABK (KH_2 - перпендикуляр к прямой AB) в три раза больше KH_1 и равна KH, так как точка K лежит на биссектрисе угла (свойство биссектрисы: каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон). Значит, площадь параллелограмма $ABCD$ в 6 раз больше площади треугольника DKE и равна $18 \cdot 6 = 108$ см^2.

22. Ответ – да.

Гипербола – это график обратной пропорциональности, на рисунке он задан на отрезке от [2; 8], точка с абсциссой $x = 6$ принадлежит этому промежутку.

23. Ответ – нет.

$f(x) > 0{,}5$ для целых чисел $-4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Всего 10 чисел.

24. Ответ – да.

Проверим, что $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 3, & -4 \le x \le 0 \\ \frac{3x+2}{2}, & 0 < x \le 2 \\ \frac{8}{x}, & 2 < x \le 8 \end{cases}$.

На промежутке $-4 \le x \le 0$ $f(x)$ – квадратичная функция. Соответствие формулы и графика-параболы достаточно проверить по 3 точкам. Проверяем точки графика (-2; -3), (0; 1) и (-4; 1). Три точки совпали, значит и все точки параболы совпали.

На промежутке $0 < x \le 2$ задана линейная функция, графиком является прямая. Достаточно проверить две точки. Вычисляем по формуле значение функции в двух точках, например: $x = 2, y = 4$ и $x = 0,\ y = 1$, точки с такими координатами лежат на прямой.

На промежутке $2 < x \le 8$ – обратно пропорциональная зависимость, график гипербола. Достаточно проверить одну точку, например, $x = 8, y = 1$ – лежит на гиперболе.

25. Ответ – нет.

На первой тренировке Витя проехал 10 км, на второй – должен проехать 12 км, на третьей – 14,4 км, на четвертой 14,4 · 1,2 =17,28 км.

26. Ответ – да.

Число $a = \text{НОД}(a;\ b) \cdot p$, число $b = \text{НОД}(a;\ b) \cdot q$. Числа p и q не имеют общих делителей. $\text{НОК}(a; b) = \text{НОД}(a; b) \cdot p \cdot q$. $6p \cdot q = 180,\ \ p \cdot q = 30$, это возможно для 4 пар взаимно простых чисел:
1 и 30, 2 и 15, 3 и 10, 5 и 6.

27. Ответ – нет.

Двузначных чисел 90, из них делятся на 13 семь чисел.
Вероятность равна $\dfrac{7}{90} = 0{,}00(7) < \dfrac{2}{25} = 0{,}08$.

28. Ответ – нет.

Вите осталось проехать $\frac{2}{3}$ пути, а времени осталось $25 - 10 = 15$ минут (10 минут он потратил, проехав треть пути). Сравниваем скорости:
$\left(\dfrac{2s}{3} : 15\right) : (s : 30) = \dfrac{4}{3}$ раза.

29. Ответ – нет.

Совместная производительность двух комбайнов равна 1/9 поля за 1 день. Пусть более мощный комбайн убирает поле за x дней и его производительность равна $1/x$ часть поля за 1 день; второй комбайн убирает поле за y дней и его производительность равна $1/y$ часть поля за 1 день. Первый комбайн треть поля уберет за $x/3$ дней, а совместно они будут убирать поле за $(10 – x/3)$ дней. $1/9(10 - x/3) = 2/3$,
$10 – x/3 = 6, x = 12$. Более мощный комбайн справится с уборкой поля за 12 дней, а время второго находим, решая уравнение:
$1/12 + 1/y = 1/9,\ \ y = 36$ дней.

30. Ответ – да.

Новый раствор – 200 граммов, содержит сахара: $40 \cdot 0{,}15 + 0{,}4 \cdot 60 = 30$ граммов. Его концентрация равна $30 : 200 \cdot 100\% = 15\%$.

31. Ответ – нет.

$AD = 10, BC = 6.\ \ \overrightarrow{AD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}(\vec{b} - \vec{a})$.

32. Ответ – нет.

$A(-2; 0), B(6; 4)$, тогда $\overrightarrow{AB}(8; 4)$.

33. Ответ – да.

Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (2; 4), вектор $\vec{b}$ имеет координаты (8; 4), тогда $(\vec{a} + \vec{b})$ имеет координаты (10; 8). Вычисляя длину вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ по формуле получим: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{100 + 64} = 2\sqrt{41}$.

34. Ответ – нет.

$x = 1$ – корень уравнения, раскладываем левую часть уравнения на множители: $x^3 - 5x^2 - 28x + 32 = 0$,
$(x^3 - x^2) + (-4x^2 + 4x) + (-32x + 32) =$
$x^2(x - 1) - 4x(x - 1) - 32(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 4x - 32)$

Уравнение $(x - 1)(x^2 - 4x - 32) = 0$ имеет три целых корня:
$x = 1, x = 8, x = -4$.

35. Ответ – да.

Условие: «график функции $y = x^2 + ax + 4$ пересекает ось OX в двух точках, абсциссы которых положительные числа, меньшие четырех», выполнится, если $D > 0, 0 < x_0 < 4$ и $y(4) > 0$.
$D = a^2 - 16, x_0 = -\frac{a}{2}, y(4) = 20 + 4a$. Решаем систему неравенств: $\begin{cases} a^2 - 16 > 0 \\ 0 < -\frac{a}{2} < 4 \\ 20 + 4a > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \\ -8 < a < 0 \\ a > -5 \end{cases}$, $a \in (-5;\ -4)$

Другой способ.
$D > 0$, тогда $a \in (-\infty;\ -4) \cup (4;\ +\infty)$. По условию $0 < x_1 < 4, 0 < x_2 < 4$, тогда $0 < x_1 + x_2 < 8, (x_1 - 4)(x_2 - 4) > 0$. Применяя формулы Виета, получим: $-8 < a < 0, 4 + 4a + 16 > 0$, что равносильно $a > -5$.
Ответ: $a \in (-5;\ -4)$.

Еще способ: найдя корни уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$, решить соответствующую условию систему неравенств:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} < 4 \\ 0 < \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 16}}{2} < 4 \end{cases}$$

36. Ответ – да.

По условию $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 285,\ x_n = kn + b$.
$x_1 = k + b,\ \ x_2 = 2k + b,\ \ x_3 = 3k + b, \ldots\ x_{10} = 10k + b = 15, \ldots$
$x_{17} = 17k + b,\ x_{18} = 18k + b,\ x_{19} = 19k + b$.
Суммируя, получим $190k + 19b = 19(10k + b) = 19 \cdot 15 = 285$.