«Кенгуру – выпускникам – 2023». 11 класс. Ответы и решения

1. Ответ – да.

$$(2{,}5-1{,}25):\frac{\frac{4}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{35}{2}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{35}{2}\cdot\frac{56}{25}=49$$

2. Ответ – да.

3. Ответ – да.

$$(\log_6 3+\log_6 12)^{\frac{1}{\log_3 2}}=(\log_6 36)^{\log_2 3}=3$$

4. Ответ – нет.

Числитель дроби $\sin 70°+\sin 20°=2\sin 45°\cos 45°=\sqrt{2}\cos 25°$, знаменатель $\sin 115°=\cos 25°$, значение выражения равно $\sqrt{2}$.

5. Ответ – нет.

Будем рассуждать так: если утверждение верно, то оно будет верным числовым равенством для любых значений α из ОДЗ.
Проверим при $\alpha=15°$. Левая часть равна

$$(2\sin^2 15°-1):\ \sin^2 30°=-\cos 30°\cdot\sin^2 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}:\ \frac{1}{4}=-2\sqrt{3},$$

правая часть равна $2\operatorname{tg}(-30°)=-2\sqrt{3}$. Равенства нет.

6. Ответ – да.

Преобразуем формулу под данное условие $a-b=x$.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)((a-b)^2+3ab)=x^3+3abx$$

7. Ответ – нет.

$$\log_{12}18=\frac{\log_2(2\ \cdot 9)}{\log_2(4\ \cdot 3)}=\frac{1+2\log_2 3}{2+\ \log_2 3}=\frac{1+2\mathrm{a}}{2+\mathrm{a}}$$

8. Ответ – да.

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{-2}{3}}+a^{\frac{-1}{6}}\cdot b^{\frac{-1}{6}}\right)\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\ \sqrt{b}$$

9. Ответ – да.

$(x^3-1)(x-2)-\ 2(1-x^2)=0$, разложим левую часть на множители, получим: $(x-1)\big((x^2+x+1)(x-2)+2(x+1)\big)=0$;
$(x-1)(x^3-x^2+x)=0$; $(x-1)x(x^2-x+1)=0$, отсюда $x=1, x=0$ – два корня, так как уравнение $(x^2-x+1)=0$ корней не имеет.

10. Ответ – нет.

Дробь равна нулю, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель при этих значениях x, не равен 0. Уравнение
$x^3 + 9x^2 - 36x = 0$ при $x = 0$, $x = –12$, $x = 3$, но x =3 не является корнем данного уравнения, так как обращает в ноль знаменатель. Сумма двух корней уравнения равна –12.

11. Ответ – нет.

Дано биквадратное уравнение, обозначим $x^2 = t$. Биквадратное уравнение будет иметь 4 различных действительных корня, если квадратное уравнение $t^2 - 5t + a = 0$ имеет два различных положительных корня. Это возможно, если дискриминант уравнения больше нуля, сумма и произведение корней положительны. Решаем систему: $\begin{cases} D = 25 - 4a > 0 \\ t_1 + t_2 = 5 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = a > 0 \end{cases}$. Получим $a \in \left(0; 6\frac{1}{4}\right)$.

12. Ответ – нет.

Обозначим $x^2 + 2x = t$, решаем уравнение $\sqrt{t+8} = 12 - t$. Уравнение равносильно уравнению $t^2 - 25t + 136 = 0$ при условии $12 - t \geq 0$; заметим, что произведение корней уравнения равно 136, сумма корней равна 25, получим t =17, $t = 8$. t =17 не удовлетворяет условию
$12 - t \geq 0$ равносильного перехода. Возвратившись к замене, получим уравнение: $x^2 + 2x - 12 = 0$. Квадратное уравнение имеет два различных корня, произведение которых равно –12.

13. Ответ – да.

Заметим, что скорость плота равна скорости течения реки, а скорость пловца: по течению $v_с + v_{т.р.}$; против течения $v_с$ - $v_{т.р}$. По течению реки пловец проплыл за один час расстояние, равное $v_с + v_{т.р.}$. Плот за это время проплыл расстояние, равное $v_{т.р.}$ Когда пловец поплыл обратно к плоту, расстояние между ними было равно $v_с$, а с плотом они сближались со скоростью, равной тоже $v_{с.}$ Поэтому встреча состоялась через 1 час.

14. Ответ – да.

Вся работа равна 1, время на выполнение всей работы первым рабочим равно x ч, вторым (x +2) ч. Производительность работы первого рабочего $\frac{1}{x}$ работы за 1 час, второго – $\frac{1}{x+2}$ работы за 1 час. Составим уравнение по условию задачи: $0{,}3x + 0{,}7(x+2) = 12$, откуда $x = 10{,}6$ часа требуется первому рабочему на выполнение всей работы. За один час он выполнит $\frac{1}{10{,}6} < \frac{1}{10} \cdot 10\% = \frac{1}{10}$ всей работы.

15. Ответ – нет.

Подставив данные в формулу, получим уравнение: $\frac{100-20}{2^{0,2t}} + 20 = 40$, откуда $2^{0,2t} = 4, t = 10$ мин ровно.

16. Ответ – нет.

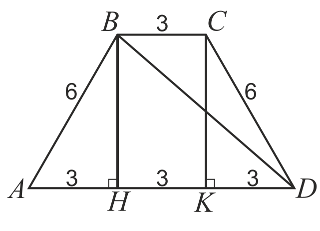
Пусть x домиков в день должна строить бригада по плану, на выполнение всего заказа отведено $\frac{2000}{x}$ дней. По условию задачи составляем уравнение: $10(x - 2) + 15(x + 8) + x\left(\frac{2000}{x} - 30\right) = 2000$, откуда $x = 10$. Тогда время фактической работы равно 2000 : 10 – 5 = 95 дней, что больше 3-х месяцев.

17. Ответ – нет.

Все стороны треугольника известны. По теореме, обратной теореме Пифагора, определяем, что треугольник прямоугольный. Площадь его равна половине произведения катетов и равна 30. Радиус вписанной окружности находим по формуле: $S = \frac{1}{2} P \cdot r$, откуда $r = 2$. Радиус описанной окружности около прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы и равен $R = 6{,}5$. $R - r = 6{,}5 - 2 = 4{,}5$.

18. Ответ – да.

По условию: в трапецию вписана окружность, тогда по свойству суммы противоположных сторон равны. По условию около трапеции описана окружность, значит, она равнобедренная. Тогда получим, что боковые стороны ее равны 6.



Трапеция равнобедренная, значит $\Delta\, ABH = \Delta\, CKD, AH = KB = 3$, высота $BH = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$, площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

19. Ответ – да.

Из треугольника ABH находим синус угла A и он равен BH : AB = $\sqrt{3}/2$. Угол A равен $60°$.

20. Ответ – да.

Радиус вписанной окружности равен половине высоты и $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Радиус описанной окружности находим по теореме синусов из ΔABD: $BD : \sin A = 2R$. Найдем длину BD по теореме Пифагора из ΔHBD.

$BD = \sqrt{3\sqrt{3}^2 + 36} = \sqrt{63}$, тогда $R = \sqrt{21}$. $r^2 : R^2 = \frac{9}{28}$.

21. Ответ – нет.

Члены последовательности: $4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$. Их сумма равна $7\frac{31}{32}$.

22. Ответ – да.

$a_4 = a_8 - 4d, a_{10} = a_8 + 2d,\ a_4 \cdot a_{10} = (a_8 - 4d)(a_8 + 2d) =$
$= (4 - 4d)(4 + 2d) = -8d^2 - 8d + 16$.

Наибольшее значение этого квадратичного выражения достигается при $d = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$ и равно –2 +4 +16 = 18.

23. Ответ – да.

Количество трехбуквенных слов, в которых буквы не повторяются равно $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; а всех слов равно $5^3 = 125$. Количество слов, в которых хотя бы две одинаковые буквы, равно 125 – 60 = 65.

24. Ответ – нет.

Благоприятные исходы: 5+6, 6+5, 6+6 – три. Всего исходов 36.
Вероятность выпадения благоприятных исходов равна $\frac{1}{12} = 0{,}8 \ldots > 0{,}7$.

25. Ответ – да.

Решаем каждое неравенство:

$x^2 > 16, |x| > 4, x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$;

$\frac{4}{x} < 1, \frac{4-x}{x} < 0, x \epsilon (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. Все решения первого содержатся в решениях второго.

26. Ответ – нет.

Данное неравенство верно для всех значений x, удовлетворяющих ОДЗ. ОДЗ: $x^2 + 5x + 6 \geq 0$, отсюда неравенство верно для $x \epsilon (-\infty; -3) \cup (-2;\ +\infty)$, то есть не для всех x.

27. Ответ – да.

Рассмотрим кусочно-линейную функцию $y = |x - 2| + 2|x + 1|$. Графиком является ломаная с вершинами в точках (2;6) и (-1;3), которые находятся ниже прямой $y = 9$. Рассмотрим вид функции справа и слева от вершин ломаной и значения x, при которых значение функции равно 9. При $x > 2$ $y = 3x, 3x = 9$ при $x = 3$; при $x < -1$ $y = -3x$, $-3x = 9$ при $x = -3$. Точки, в которых значения функции не превосходят 9, – целые числа от -3 до 3 включительно, всего 7 целых чисел.

28. Ответ – нет.
1 – $\cos^2 x < 0$, $|\cos x| > \frac{1}{2}$, получится два промежутка на тригонометрической окружности: первый $2\pi k + 2\pi/3 < x < 4\pi/3 + 2\pi k, k \in Z$; числа $x = 9, x = 10$ принадлежат этому промежутку при $k = 1$. Второй $2\pi k + 5\pi/3 < x < 7\pi/3 + 2\pi k, k \epsilon Z$. При $k = 1$ получим: $\frac{11}{3}\pi < x < \frac{13}{3}\pi$, число 12 входит в этот промежуток, а число 11 не входит, так как $\frac{11}{3}\pi > 11$.

29. Ответ – да.

Сравниваем угловые коэффициенты касательных, проведенных к графику функции при $x = 3$ и $x = -3$. Угловые коэффициенты – положительные числа, касательная, проведенная к графику в точке $x = 3$, круче, поэтому $f'(3)$ больше.

30. Ответ – да.

Функция отрицательна и возрастает при $x = -4;\ -3;\ 2;\ 3$; то есть при 4 целых значениях x.

31. Ответ – да.
Формулой $y = kx + 2$ задается пучок прямых, проходящих через точку (0; 2). Проверяем, как расположены прямые, при $k < -0{,}2$.

При $k = -0{,}2$ график проходит через конечную точку графика с координатами (5; 1). При остальных $k < -0{,}2$ прямые будут пересекать график функции в одной точке.

32. Ответ – нет.
Функция $y = f(|x|)$ – четная, ее график симметричен относительно оси Oy. График при $x < 0$ получается отражением части графика при $x \geq 0$ относительно оси Oy, поэтому значения функции равны значениям функции при $x \geq 0$, то есть промежуток $[-3; 1]$.

33. Ответ – нет.

Корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ изображаются двумя точками на окружности, уравнения $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ – четырьмя точками на окружности. ОДЗ уравнения: $\cos x \le \frac{1}{2}$. Понятно, что $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$, не принадлежат ОДЗ. Всего на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ уравнение имеет 4 корня: $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$.

34. Ответ – нет.

Промежутки возрастания функции $y = \sin t$:
$2\pi k - \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;\ t = x + \frac{\pi}{6}$, тогда для данной функции промежутки возрастания $2\pi k - \frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.
При $k = 0$ получим: $-2\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + 0$ – принадлежит данному в условии промежутку.
При $k = 1$ получим: $2\frac{\pi}{3} \le x \le 7\frac{\pi}{3}$ – принадлежит данному в условии промежутку.
При $k = 2$ получим: $10\frac{\pi}{3} \le x \le 13\frac{\pi}{3}$ – частично принадлежит промежутку, данному в условии.
Таким образом, на указанном промежутке есть три промежутка возрастания функции.

35. Ответ – да.

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = -2$. Разделим обе части уравнения на 2, получим $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = -1$; числа $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$ заменим на $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{\pi}{6}$ соответственно и применим формулу сложения, получим:
$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, откуда $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. По условию $x \in [-\pi; 4\pi]$.
Этому промежутку принадлежат $x = -\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{10\pi}{3}$. Сумма корней равна 4π.

36. Ответ – нет.

Обозначим $\sin x = t, t \in [-1; 1]$. Функция $y = 2t^2 - 2t + 5$ – квадратичная. Наименьшее значение принимает при $t = \frac{1}{2}$, которое входит в промежуток $t \in [-1; 1]$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}5$. Наибольшее значение на промежутке $t \in [-1; 1]$ будет принимать при $t = -1, y(-1) = 9$. Область значения функции – отрезок $[4{,}5; 9]$.

37. Ответ – да.

Заметим, что число $10 > e^2$, тогда $e < \sqrt{10}$, тогда $\lg e < \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}}(\lg e) > 1$,

$\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}(\lg e)\right) > 0$

38. Ответ – нет.

Функция $y = 5^{x^2+2x}$ на отрезке $[-2; 1]$ принимает наименьшее значение, когда квадратичная функция $t = x^2 + 2x$ на этом промежутке принимает наименьшее значение. $x_0 = -1$ (точка минимума функции) принадлежит промежутку, поэтому наименьшее значение функции равно $y(-1) = 5^{-1} = 0{,}2$.

39. Ответ – да.

Уравнение $3 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 3^{4x} = 5 \cdot 36^x$ – однородное. Делим обе части уравнения на 9^{2x} и обозначим $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$, получим уравнение: $3t^2 - 5t + 2 = 0$; решая его, получим: $t_1 = 1, t_2 = \frac{2}{3}$. $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1, x = 0$; $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{2}$. Сумма корней равна $\frac{1}{2}$.

40. Ответ – нет.

Поскольку основание логарифма x, то неравенство решаем отдельно при $x > 1$ и при $0 < x < 1$.

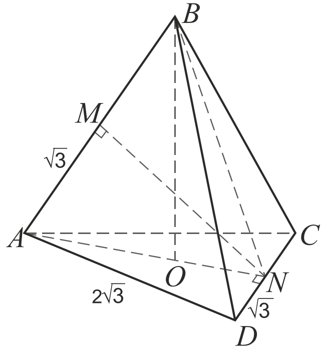
1. $\begin{cases} x > 1 \\ 3x - 1 > x \\ 3x - 1 > 0 \end{cases}$, решив систему, получим $x \in (1;\ +\infty)$

2. $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x - 1 < x \\ 3x - 1 > 0 \end{cases}$, решением этой системы является промежуток значений $x \in \left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$.

Проверяем, входят ли числа $x \in \left(\frac{2}{5};\ \frac{3}{4}\right)$ в решения неравенства: замечаем, что $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, значит не все x из данного промежутка являются решениями неравенства

41. Ответ – нет.

По условию тетраэдр правильный, значит все его грани – равносторонние треугольники, основание высоты тетраэдра – центр равностороннего треугольника – точка пересечения высот, медиан. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник равен $\frac{1}{3}$ высоты треугольника, $r = \frac{1}{3}h$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; по условию $a = 2\sqrt{3}$, тогда $r = 1$.



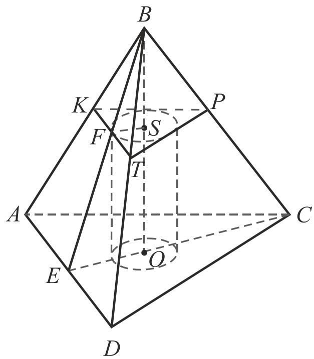
На рисунке отрезок, соединяющий середины двух ребер, лежащих на скрещивающихся прямых, – это отрезок MN (заметим, что для правильного тетраэдра выбор середин ребер независим). ΔABN– равнобедренный, $AN = BN = 3$, MN– медиана и высота этого треугольника, $MN = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$.

42. Ответ – да.

Сечением является треугольник, на рисунке – ΔABN.

$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot NM, S = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$.

43. Ответ – нет.



Проведем сечение через верхнее основание отверстия. Сечением является равносторонний ΔKPT, расположенный параллельно основанию тетраэдра.

Заметим, что тетраэдр распадется, если радиус вписанной в треугольник KPT больше или равен $\frac{1}{2}$. Найдем, на какой высоте от основания будет находиться верхнее основание отверстия, когда $r = SF = \frac{1}{2}$. Радиус вписанной окружности в основание тетраэдра $OE = 1$. SF– средняя линия ΔBOE, поэтому S– середина высоты BO тетраэдра. Вычислим BO из ΔBCO; $CO = \frac{2}{3}CE = 2$; $BO = \sqrt{BC^2 - CO^2} =$ $= \sqrt{12-4} = \sqrt{8}$, тогда расстояние OS от основания до сечения равно $\sqrt{2}$. При такой глубине отверстия тетраэдр уже распадется, а данная глубина $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, поэтому тетраэдр, тем более, распадется.

44. Ответ – да.

Срезанная верхняя часть – тетраэдр *KBPT*, подобный данному, коэффициент подобия $k = \sqrt{\frac{3}{8}}$. Отношение объемов подобных фигур равно $k^3 = \sqrt{\frac{27}{512}}$. Объем данного тетраэдра равен $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H$,
$S_{\text{осн}} = 3\sqrt{3}, H = \sqrt{8}, V = \sqrt{24}$.
Объем срезанной части $V_{\text{ср.части}} = \sqrt{\frac{27}{512}} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{\frac{27 \cdot 24}{512}} = \sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{9}{8}$.

45. Ответ – нет.

Свежие яблоки содержат 40% твердого вещества, а моченые – 20% твердого вещества. В 24 кг свежих яблок содержится $24 \cdot 0{,}4 = 9{,}6$ кг твердого вещества, что составляет 20% веса моченых. Тогда вес моченых яблок будет равен $9{,}6 : 20 \cdot 100 = 48$ кг.

46. Ответ – да.

Пусть затраты предприятия составляли 100%, через год они составляли 84%, а еще через год: $84 \cdot 0{,}95 = 79{,}8\%$.
Уменьшились на 100% – 79,8% = 20,2%

47. Ответ – нет.

Обозначим $\cos x = t$, получим уравнение: $t^2 - 2at + 2a - 1 = 0$, где $t \in [-1; 1]$. $D = 4a^2 - 8a + 4 = 4(a-1)^2, t_1 = 1, t_2 = 2a - 1$.

Возвращаясь к замене, получим $\cos x = 1, \cos x = 2a - 1$. Уравнение $\cos x = 1$ на указанном промежутке имеет два корня: $x = 0, x = 2\pi$.
Три корня получатся, если $2a - 1 = -1$, отсюда $a = 0$. При $a = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$ уравнение имеет три корня $x = \pi, x = 0, x = 2\pi$.

48. Ответ – нет.

Область определения функции находится из условий: $10 + a > 0$, $10 + a \neq 1$. $\frac{a-8x}{3x+a} > 1$, тогда $\frac{-11x}{3x+a} > 0$, при $a > -10, a \neq -9$. По условию область определения содержит отрезок положительных чисел x.
Неравенство $\frac{-11x}{3x+a} > 0$ для положительных чисел x будет выполняться при $x \in \left(0; -\frac{a}{3}\right)$, где $-\frac{a}{3} > 0$. Длина отрезка не менее 2, значит, $-\frac{a}{3} > 2$, отсюда $a < -6$. Учитывая условие $a > -10, a \neq -9$, получим $a \in (-10; -9) \cup (-9; -6)$.