«Кенгуру – выпускникам – 2024». 11 класс. Ответы и решения

1. Ответ – нет.

$$\left|\frac{472}{945}-1\right|=\frac{473}{945}; \quad \frac{473}{945}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cdot 945}>0$$

2. Ответ – да.

После преобразований в левой части получаем $\frac{17}{5^5}$.

Разность $\frac{17}{5^5}-\frac{1}{200}=\frac{136-125}{5^5\ \cdot\ 8}>0.$

3. Ответ – нет.

$$1-2\sin^2 75°+\sin 600° = \cos 150° - \sin 60° \neq 0$$

4. Ответ – да.

$$\frac{\log_3 32}{\log_3 136-\log_3 17}=\frac{10\log_3 2}{3\log_3 2}=\frac{10}{3}$$

5. Ответ – нет.

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получаем выражение

$$4+4a^2+b^2+(ab)^2-4-4ab-(ab)^2=4a^2-4ab+b^2=\ (2a-b)^2$$

6. Ответ – нет.

Преобразуя левую часть, получаем $\frac{2(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}$, а после упрощения правой части получим дробь $\frac{2(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1}$.

7. Ответ – да.

Зная, что $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$, имеем:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\ \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

8. Ответ – да.

$$\log_4\frac{x^2\sqrt{32}}{\sqrt[5]{x}}=\frac{1}{2}\log_2\left(x^{\frac{9}{5}}\cdot 2^{2,5}\right)=\frac{9}{10}\log_2 x+\frac{5}{4}=0{,}9a+1{,}25$$

9. Ответ – да.

$$(204\ -\frac{197}{a^2})\sqrt{a}=\left(\sqrt{204}-\frac{\sqrt{197}}{\text{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{204}+\frac{\sqrt{197}}{\text{a}}\right)\cdot\sqrt{a}$$

Очевидно, что выражение будет равно 0 только при $a>0$: $a=\dfrac{\sqrt{197}}{\sqrt{204}}$.

10. Ответ – нет.
Обозначим $t=x^2+4x$, тогда уравнение примет вид: $t^2-t-12=0$, его корни -3 и 4. Тогда сумма корней исходного уравнения равна -8.

11. Ответ – да.

Упростив левую часть, получаем уравнение $\dfrac{2x^2+2x+2}{x^2-1}=\dfrac{6}{x^2-1}$, $2x^2+2x+2=6$, находим корни: 1 и -2. Очевидно, что $x=1$ не подходит. Исходное уравнение имеет один корень.

12. Ответ – да.
Данное уравнение может иметь корни, если правая часть уравнения неотрицательна. После возведения обеих частей уравнения в квадрат, имеем: $2ax=-3$; $x=-1.5a$; $-1{,}5a\geq 0$, $a\leq 0$.

13. Ответ – да.
Пусть x – скорость плота, y – собственная скорость катера.
$y=4x$, т. к. $10x=2(x+y)$. Обратно катер плывёт со скоростью $5x$, тогда его собственная скорость $6x$. Значит, катер увеличил её в 1,5 раза.

14. Ответ – нет.
$h(t)=at^2+bt+c, h(0)=15, h(2)=4a+2b+15, h(3)=9a+3b+15$
Составим и решим систему уравнений $\begin{cases}4a+2b+15=6\\9a+3b+15=3\end{cases}$
$a=-0{,}5, b=5{,}5$, тогда $h(t)=-0{,}5t^2+5{,}5t+15$, $\qquad h(4)\neq 0$

15. Ответ – нет.
Пусть x – масса свежих яблок, тогда $0{,}25x$ – масса сушёных. В яблоках содержится 21% сухого вещества, значит, в сушёных яблоках сухое вещество составляет 84% ($\frac{0{,}21x}{0{,}25x}\cdot 100\%=84\%$), а вода 16%.

16. Ответ – нет.

Пусть первоначальная сумма S, p – количество процентов.

Тогда $S \cdot p = 6000$ – прибавка в конце первого года, а сумма через год: $S(p-1)^2 = 72600$.

Решая уравнение $\frac{\mathrm{p}}{(p-1)^2} = \frac{6000}{72600}$, получим, что $p = 0{,}1$ удовлетворяет условию задачи, а это 10%.

17. Ответ – нет.

Проведем в трапеции $ABCD$ высоты BF и CH, $BF = CH = 12$, $AF = HD = 5$.

Из прямоугольного треугольника HCD найдём, что $\sin D = \frac{12}{13}$.

$\angle D = \angle A = 180° - \angle B = 180° - \angle C$. Синусы всех углов равны $\frac{12}{13}$.

18. Ответ – да.

Из прямоугольного треугольника ACH найдём AC.

$AC = 12\sqrt{2}$ $(CH = AH = 12)$.

19. Ответ – нет.

Радиус описанной окружности около трапеции $ABCD$ равен радиусу описанной окружности около треугольника ACD (одна и та же окружность). Зная формулы площади треугольника, найдём радиус.

$S = \frac{1}{2}AD \cdot CH$, $S = \frac{AC \cdot AD \cdot CD}{4R}$, значит, $R = \frac{12\sqrt{2} \cdot 17 \cdot 13}{2 \cdot 17 \cdot 12} = 6{,}5\sqrt{2}$.

20. Ответ – да.

Рассмотрим треугольники OMC и AON (O – центр вписанной окружности).

$(OM \perp \mathrm{BC}, \mathrm{O}N \perp AD)$, $MC = 3{,}5$, $AN = 8{,}5$, $OC = AO = R = 6{,}5\sqrt{2}$.

Пусть $OM = x$, тогда $ON = 12 - x$. Составим уравнения: $x^2 + MC^2 = R^2$, $(12-x)^2 + AN^2 = R^2$, найдём, что $x = 8{,}5$, значит, $OM = 8{,}5$, $ON = 3{,}5$.

$S = \frac{1}{2}OM \cdot BC = 8{,}5 \cdot 3{,}5$ – площадь ΔBOC

$S = \frac{1}{2}ON \cdot AD = 3{,}5 \cdot 8{,}5$ – площадь ΔAOD

Площади треугольников равны.

21. Ответ – да.
На первом месте может стоять любая из 5 букв, на следующем уже одна из 4 (чтобы не повторялось с первой), на последнем месте может стоять одна из 3 букв (чтобы не повторялось с предыдущими).
Значит, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

22. Ответ – да.
Вероятность промаха при выстреле равна 0,4.
$1 - 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 1 - 0{,}064 = 0{,}936 > 0{,}9$

23. Ответ – нет.
$b_n = 3 \cdot 2^n$. Тогда сумма
$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 16 = 3 \cdot 30 -$ кратна 15.

24. Ответ – да.
Разность данной арифметической прогрессии равна 18, значит, 71 – пятый член этой прогрессии.

25. Ответ – да.
Преобразуем данное неравенство: $\dfrac{x+3}{x^2+3x} - 1 \geq 0$:
$\dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-1)}{x(x+3)} \geq 0.$
Решая это неравенство, получим, что условию задачи удовлетворяет только число -2.

26. Ответ – нет.
$(x+8)^2 \geq 0$, поэтому -8 не является решением исходного строгого неравенства.

27. Ответ – да.
В результате преобразований получаем $\begin{cases} x \geq -3{,}6 \\ x < -2; x > 2 \end{cases}$.
Числа: $-3, 3, 4, 5$ – это те целые значения x из промежутка [-3; 5], которые удовлетворяют системе.

28. Ответ – да.
Решением данного неравенства $|x^2 + 5x| < 6$ являются промежутки $(-6; -3)$ и $(-2; 1)$. Тогда сумма целых значений x из этих промежутков:
$-5 + (-4) + (-1) + 0 = -10.$

29. Ответ – нет.
По графику видно, что прямая $y = 3$ пересекает график данной функции в двух точках.

30. Ответ – нет.
На промежутке $(2; 3)$ график функции лежит выше параболы
$y = -x^2 + 3x$.

31. Ответ – да.
Производная функции отрицательна на промежутках убывания функции при $x = -4, x = -1, x = 0, x = 1$.

32. Ответ – да.
Пусть $f(1) = b, f(b) = c$, прямая $y = c$ пересекает график данной функции в трех точках.

33. Ответ – да.
Преобразуем выражение:
$\sin x \cdot \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cos x = \sin x \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \dfrac{1}{4}\sin 4x.$

Будем рассматривать функцию: $f(x) = \dfrac{1}{4} sin\, 4x$.

Упростим: $\cos\left(4\left(x + \frac{3\pi}{8}\right)\right) = \cos\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin 4x$.

34. Ответ – нет.
Найдём производную данной функции, она равна $\cos 4x$. Найдём стационарные точки: $\cos 4x = 0,\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, k -$ целое.
Очевидно, что указанные в условии задачи точки не могут быть точками максимума данной функции.

35. Ответ – нет.
$f'(0) = 1,\ f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1, f'(0) \cdot f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1,$ значит касательные образуют прямой угол.

36. Ответ – нет.
Рассмотрим функцию: $g(x) = \frac{1}{4}\sin x - \sin^2 x$.
Обозначим $t = \sin x,$ тогда $y(t) = \frac{1}{4}t - t^2$.
Наибольшее значение этой функции равно $\frac{1}{64}$, значит, наибольшее значение функции $g(x)$ тоже $\frac{1}{64}$.

37. Ответ – нет.

Должны выполняться условия: $\begin{cases} x^2 - 12\text{x} + 36 > 0 \\ \text{x} - 1 > 0 \\ \text{x} - 1 \neq 1 \end{cases}$, значит,

$1 < x < 2,\ 2 < x < 6,\ x > 6.$

38. Ответ – нет.

Решаем уравнение $x^2 - 12x + 36 = (2x - 1)^2$

при условии, что $\begin{cases} x^2 - 12\text{x} + 36 > 0, \\ (2x - 1)^2 > 0, \\ (2x - 1)^2 \neq 1 \end{cases}$

Очевидно, что оба корня уравнения -5 и $\frac{7}{3}$ подходят.

39. Ответ – да.

Неравенство $0{,}2^{|x-2|} > 5^{-1}$ выполняется при $1 < x < 3$.

Неравенство $2^x > 4^x - 9$ выполняется при x$< \log_2 9$.

$1 < \log_2 9 < 3$.

40. Ответ – нет.

Запишем данное уравнение так:

$2^{x^2} - 3 \cdot 2^{x^2-3} = 5^{x^2-2} - 3 \cdot 5^{x^2-3}$,

$5 \cdot 2^{x^2-3} = 2 \cdot 5^{x^2-3}, \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-3} = \frac{2}{5}$, значит, $x = 2$, $x = -2$.

41. Ответ – да.

Апофемы данной пирамиды $MK = ME = 4$, а высота пирамиды $MH = \sqrt{7}$.

Сечение пирамиды – треугольник MEK, его площадь равна $3\sqrt{7} < 9$.

42. Ответ – да.

Радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в треугольник MEK.

$S = p \cdot r,\ 3\sqrt{7} = r \cdot 7,\ r = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{7},\ r = \frac{3}{7} \cdot MH.$

43. Ответ – нет.

Координаты точки $M\ (3; 3; \sqrt{7})$ не удовлетворяют данному уравнению плоскости.

44. Ответ – да.

Введём векторы: $\overrightarrow{BK}\{3; 6; 0\}$ и $\overrightarrow{AM}\{-3; 3; \sqrt{7}\}$. Скалярное произведение этих векторов равно 9. Найдём косинус угла α между ними.

$\left|\overrightarrow{BK}\right| = \sqrt{45}, \left|\overrightarrow{AM}\right| = 5$, тогда $\cos\alpha = \dfrac{9}{5\sqrt{45}} < 0{,}3$.

45. Ответ – да.

$$\frac{2b + 1 + 3b^2}{b + 1} = 3b - 1 + \frac{2}{b + 1},$$

значит, $b + 1 = 2, b + 1 = -2, b + 1 = 1, b + 1 = -1$,

откуда $b = 1, b = -3, b = 0, b = -2$.

46. Ответ – да.

При $a = 0$ уравнение имеет один корень: $x = 0{,}5$.

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет один корень, если дискриминант равен 0, т.е. при $a = 3$ или при $a = -1{,}5$.

47. Ответ – нет.

Правая часть $4c + 6 = 2 \cdot (2c + 3)$ делится на 2, но на 4 не делится, а левая часть при $a = 2m$ делится на 4, а при $a = 2m + 1$ не делится на 2.

$a^2 = 4m^2$ или $a^2 = 4m^2 + 4m + 1$.

48. Ответ – да.

Преобразуем: $10^x \cdot (15 + 10k) = k + 20, 10^x = \frac{k+20}{10k+15}$.

Уравнение не имеет корней, когда $\dfrac{k + 20}{10k + 15} \leq 0, -20 \leq k < -1{,}5$

либо когда $10k + 15 = 0$, т. е. $k = -1{,}5$.